

Penerapan Sistem Persamaan Diferensial Linier pada Simulasi Debit Air pada Pipa

Rustam Efendi^a, Diang Sagita^b

^aDepartment of Mechanical and Biosystem Engineering, IPB University, Indonesia.
e-mail: rustamefendi032@gmail.com

^bPusat Penelitian Teknologi Tepat Guna – Lembaga Ilmu Pengetahuan Indonesia
JL. K.S. Tubun No. 5 Subang, Jawa Barat
e-mail: dian043@lipi.go.id

ABSTRAK

Kata kunci:

analisis numerik; metode Euler; persamaan diferensial; sistem instalasi pipa.

Salah satu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang cukup rumit untuk diselesaikan adalah sistem aliran fluida (air) dalam bejana bertingkat. Pada penelitian ini, telah dilakukan pembuatan model sistem persamaan diferensial linear (SPDL) yang menggambarkan aliran air dari sistem instalasi air dengan tangki bertingkat serta membandingkan hasil simulasi numerik dari model dengan hasil eksperimen. Model SPDL dibangun dengan melibatkan observasi lapang secara langsung untuk menentukan nilai konstanta model (C_1 , C_2 dan C_3). Model yang telah dibangun disimulasikan secara numerik menggunakan metode Euler dengan 4 skenario nilai konstanta. Hasil menunjukkan bahwa volume tangki A dan B serta laju perubahan volume airnya telah berhasil digambarkan oleh model SPDL yang telah dibangun dengan hasil yang paling mendekati hasil eksperimen adalah nilai C_1 sebesar 0.01323 dan C_2 sebesar 0.01091 dengan nilai RMSE 0.2599.

ABSTRACT

Keyword:

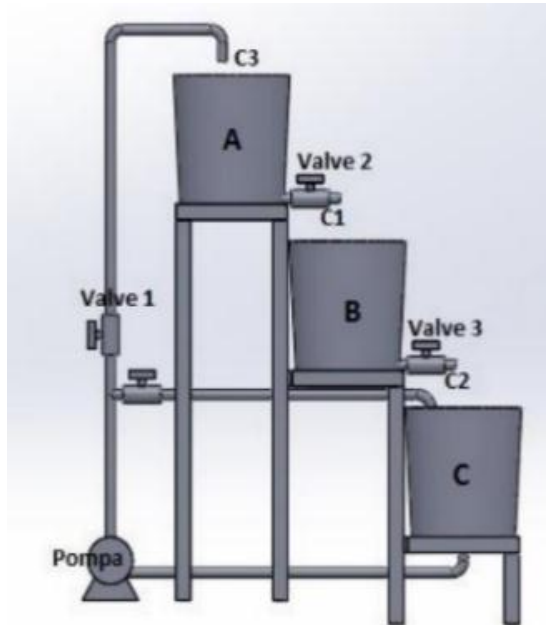
differential equations; Euler's method; numerical analysis; pipe installation system.

One of the problems in daily life that are quite complicated to solve is the fluid flow system (water) in a multilevel vessel. In this study, a model of a system of linear differential equations (SPDL) has been developed which describes the flow of water from a water installation system with a multilevel vessel and compared the results of the numerical simulation with the experimental results. The SPDL model was built by involving direct field observations to determine the model constants (C_1 , C_2 , and C_3). The model that has been built was simulated numerically using the Euler method with 4 scenarios of constant values. The results show that the volumes of tanks A and B and the rate of change of their water volume have been successfully described by the SPDL model that has been built with the results closest to the experimental results, namely the C_1 value of 0.01356 and C_2 of 0.01091 with RMSE value 0.2599.

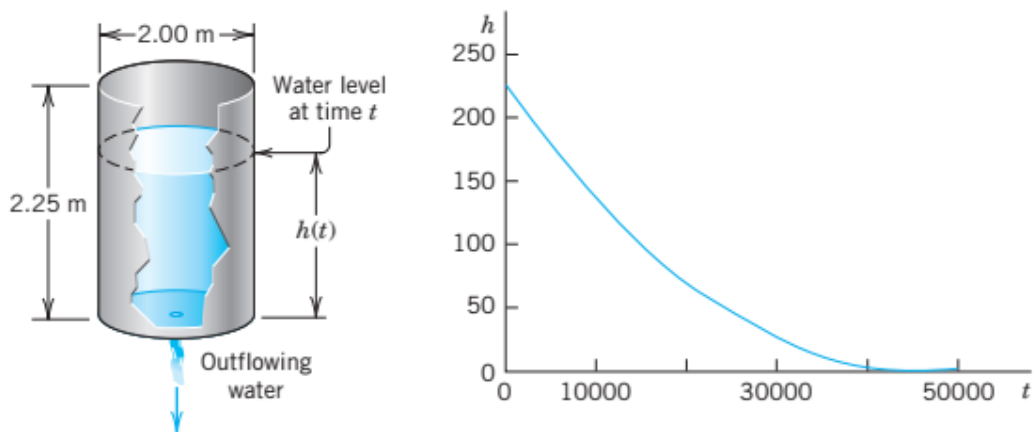
1. PENDAHULUAN

Suatu sistem yang cukup kompleks dimana perubahan terjadi setiap saat (satuan waktu) umumnya sulit dipecahkan dengan perhitungan Aljabar sederhana. Salah satu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang cukup rumit adalah sistem aliran fluida (air) dalam bejana bertingkat (Gambar 1). Dalam kasus ini, volume air pada tangki A dan B akan terus mengalami perubahan setiap satuan waktu akibat adanya input air yang masuk dan output air yang keluar, begitu juga pada tangki B. Hal yang menarik dari kasus ini adalah laju pengeluaran air dari tangki A dan tangki B sangat dipengaruhi oleh volume di tangki masing-masing sebagaimana berlaku hukum Torricelli [1]. Hukum Torricelli, juga dikenal sebagai teorema Torricelli, adalah teorema dalam dinamika fluida yang berkaitan dengan kecepatan fluida yang mengalir dari sebuah lubang yang dipengaruhi oleh ketinggian air terhadap lubang pengeluaran. Hal ini dapat dilihat pada ilustrasi Gambar 2.

Secara teori, kasus sebagaimana Gambar 1 memungkinkan terjadinya perubahan volume dan juga debit setiap saat karena dipengaruhi oleh beberapa faktor sebagai contoh volume air di tangki A dipengaruhi oleh input air dan output air. Namun dengan berlakunya hukum Torricelli, output air tangki A juga dipengaruhi oleh volume air di tangki A itu sendiri sehingga kasusnya menjadi lebih kompleks.



Gambar 1 Sistem instalasi aliran air pada tangki bertingkat



Gambar 2 Ilustrasi kecepatan air keluar dari tangki berdasarkan hukum Toricelli [1]

Dengan demikian, untuk memodelkan kasus aliran air ini diperlukan suatu pendekatan sistem persamaan diferensial linear (SPDL) yang bergantung kepada waktu. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat atau melibatkan turunan (derivative) atau diferensial dari fungsi yang tidak diketahui [2]. Persamaan diferensial memiliki aplikasi yang luas dalam berbagai disiplin ilmu teknik dan sains. Secara umum, pemodelan diaplikasikan pada variasi besaran fisika seperti suhu, tekanan, perpindahan, kecepatan, tegangan, regangan, arus dan besaran lainnya yang bergantung kepada waktu atau lokasi, atau keduanya [3]. Dalam kasus penelitian ini, model umum dari SPDL yang diilustrasikan oleh Gambar 1 dapat dilihat pada persamaan (1)-(3). Sebuah sistem persamaan diferensial terdiri dari sebuah himpunan persamaan-persamaan yang simuliteran mencakup beberapa turunan dari suatu fungsi.

$$Q = C_3 = \frac{V}{t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial VA}{\partial t} = C_3 - C_1 \times VA \quad (2)$$

$$\frac{\partial VB}{\partial t} = C_1 \times VA - C_2 \times VB \quad (3)$$

Dimana, Q adalah laju aliran air (liter/s), VA adalah volume air pada tangki A (liter), VB adalah volume air pada tangki B (liter); t adalah waktu (s); C_1 dan C_2 adalah konstanta.

Dalam penelitian ini, terapan matematika yang digunakan untuk mencari solusi persamaan SPDL ini adalah metode numerik, yakni suatu teknik penyelesaian yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan dan dilakukan secara berulang-ulang [4]. Penelitian ini bertujuan untuk membuat model persamaan diferensial linear dalam kasus aliran air pada pipa dan tangki air sebagaimana Gambar 1 serta membandingkan hasil keluaran dari model secara numerik dan eksperimental. Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat dalam upaya menerapkan sistem persamaan diferensial linear dalam aplikasi sistem instalasi air dengan tangki bertingkat sehingga perubahan-perubahan yang terjadi pada sistem (debit, volume dan laju aliran) dapat dimodelkan dan diprediksi melalui pendekatan numerik.

2. METODE PENELITIAN

Peralatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sistem instalasi air yang terdiri atas tiga buah tangki, satu buah pompa air sentrifugal, dan satu buah kamera perekam. Sementara bahan yang digunakan adalah air sebagai objek fluida yang dialirkan.

2.1 Prosedur Penelitian

Unit instalasi pipa yang diuji terdiri dari tiga buah tangki air (A, B dan C), empat buah *valve* yang terhubung dengan instalasi pipa, dan satu buah pompa air sentrifugal (Gambar 3). Pengujian ini dimulai dengan mengisi tangki C hingga penuh, kemudian pompa dinyalakan. Debit air pompa yang masuk ke tangki A diukur untuk menentukan nilai Q atau C_3 (liter/s). C_3 diukur dengan cara membiarkan pompa mengisi tangki A sampai ketinggian volume tertentu dengan kondisi *valve* 2 tertutup. Buka *valve* 1 dibuka setengah agar air di tangki C tidak cepat habis. Nilai C_3 dihitung menggunakan persamaan (4). C_3 ditentukan dengan menghitung perubahan volume per 3 detik sampai volume tangki A mencapai 20 liter.

$$C_3 = \frac{(VA_n - VA_{n-1})}{(t_n - t_{n-1})} \quad (4)$$

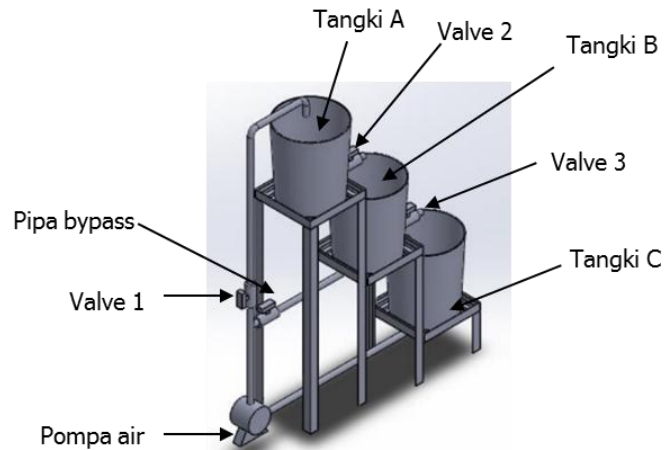
Selanjutnya, untuk mencari nilai konstanta C_1 dan C_2 , diperlukan observasi terhadap besarnya laju perubahan volume air di tangki A ($\partial VA/\partial t$) dan di tangki B ($\partial VB/\partial t$). Observasi dimulai dengan membuka *valve* 2 dan *valve* 3 secara penuh sehingga airnya mengalir. Pada kondisi ini, air di tangki A memiliki volume 20 liter. Laju $\partial VA/\partial t$ dan ($\partial VB/\partial t$) didapatkan dari hasil pengamatan perubahan volume dalam waktu 180 detik (3 menit) di tangki A dan B pada kondisi *valve* 1, 2, dan 3 dibuka sesuai uraian di atas. Laju $\partial VA/\partial t$ dan ($\partial VB/\partial t$) masing-masing dihitung menggunakan persamaan (5) dan (6). Selanjutnya untuk menghitung nilai konstanta C_1 dan C_2 , digunakan persamaan (7) dan (8).

$$\frac{\partial VA}{\partial t_n} = \frac{(VA_n - VA_{n-1})}{(t_n - t_{n-1})} \quad (5)$$

$$\frac{\partial VB}{\partial t_n} = \frac{(VB_n - VB_{n-1})}{(t_n - t_{n-1})} \quad (6)$$

$$C_{1n} = \frac{(C_3 - \frac{\partial A}{\partial t_n})}{VA_n} \quad (7)$$

$$C_{2n} = \frac{(C_3 - \frac{\partial A}{\partial t_n} - \frac{\partial B}{\partial t_n})}{VA_n} \quad (8)$$



Gambar 3 Tampak isometri dari sistem instalasi air

2.2 Analisis Numerik

Analisis numerik dilakukan pada model yang telah dibangun berdasarkan nilai konstanta yang diperoleh yaitu C_1 , C_2 dan C_3 . Model yang telah dibangun diuji secara numerik menggunakan metode *Euler* sebagaimana yang digunakan oleh Fajar *et al.* [5] untuk mensimulasikan asas Torricelli pada sebuah bejana serta oleh Wijaya *et al.* [6] untuk membandingkan hasil penyelesaian persamaan diferensial biasa. Pada dasarnya terdapat beberapa metode numerik yang sering digunakan untuk menghitung solusi persamaan differensial biasa, antara lain metode Euler, Heun, Deret Taylor, dan Runge-Kutta bertingkat [7], Ng *et al.* [8] juga menggunakan Hukum Torricelli untuk mengeringkan drainase dengan sistem pemodelan numerik, namun pada penelitian ini hanya berfokus pada metode Euler saja. Metode Euler disebut juga metode orde pertama karena pencarian dalam persamaannya hanya mengambil sampai orde pertama saja. Metode Euler juga menggunakan bantuan dari deret Taylor [9]. Perhitungan numerik dilakukan untuk mengetahui besar volume pada tangki A dan B menggunakan beberapa skenario nilai C_1 dan C_2 dengan tujuan untuk mendapatkan model yang paling mendekati kebenaran. Simulasi numerik dilakukan menggunakan aplikasi *microsoft excel* dengan menerapkan persamaan (9) dan (10).

$$VA_{i+1} = VA_i + \frac{\partial A}{\partial t} t \quad (9)$$

$$VB_{i+1} = VB_i + \frac{\partial B}{\partial t} t \quad (10)$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Nilai Konstanta C_3 (Debit Pompa)

Sesuai dengan prosedur penelitian yang dijelaskan pada Bab Metode Penelitian, nilai konstanta C_3 dapat diketahui melalui observasi. Nilai C_3 bersifat tetap karena pompa mengalirkan debit air secara konstan dengan syarat kecepatan putarnya tetap. Hasil pengukuran debit air pompa disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1 Hasil pengamatan volume tangki A

Waktu (s)	Volume tangki A (liter)	Nilai debit C_3 (liter/s)
0	15.0	-
3	15.5	0.16667
6	16.0	0.16667
9	16.5	0.16667
11	17.0	0.25000
14	17.5	0.16667
17	18.0	0.16667
20	18.5	0.16667
24	19.0	0.12500
26	19.5	0.25000
30	20.0	0.12500
Rata-rata		0.17500

Pengamatan dilakukan per tiga detik agar didapatkan pembacaan skala yang lebih jelas. Dengan memasukkan nilai V_A dan t ke dalam persamaan (4) maka nilai C_3 diperoleh. Untuk mendapatkan hasil rata-rata maka penghitungan nilai C_3 dilakukan dari detik ke nol sampai 30 detik. Sehingga diperoleh nilai rata-rata C_3 yaitu 0.175 liter/s.

3.2 Nilai Konstanta C_1 dan C_2

Nilai konstanta C_1 dan C_2 diperoleh dengan cara observasi dan pengukuran secara langsung pada sistem instalasi air. Sistem aliran air dijalankan sebagaimana prosedur yang telah dijelaskan, dimana air secara kontinyu dipompa dengan debit yang telah diketahui yang dinotasikan sebagai C_3 sehingga masuk ke tangki A. Kemudian air keluar dari tangki A melalui *valve* 2 ke tangki B dan dari tangki B dialirkan ke tangki C melalui *valve* 3. Untuk mendapatkan nilai C_1 dan C_2 dibutuhkan perhitungan dengan menggunakan persamaan (5), (6), (7) dan (8). Pada penelitian ini, pengamatan perubahan volume pada tangki A dan B dilakukan per 10 detik. Dari hasil Tabel 2 dapat dilihat bahwa nilai rata-rata untuk C_1 adalah 0.01312 sedangkan nilai C_2 adalah 0.01093.

Tabel 2 Hasil observasi perubahan volume air tangki A dan B

t (s)	A (l)	$\partial V_A / \partial t$	B (l)	$\partial V_B / \partial t$	C_1	C_2
0	15	-0.025	16	0.025	0.01356	0.01077
10	14.75	0	16.25	0.025	0.01186	0.00909
20	14.75	-0.025	16.5	0	0.01379	0.01212
30	14.5	0	16.5	0	0.01207	0.01061
40	14.5	0	16.5	0.025	0.01207	0.00896
50	14.5	0	16.75	0	0.01207	0.01045
60	14.5	0	16.75	0	0.01207	0.01045
70	14.5	-0.01	16.75	0	0.01285	0.01104
80	14.4	-0.01	16.75	0	0.01294	0.01104
90	14.3	-0.02	16.75	0	0.01383	0.01164
100	14.1	-0.01	16.75	0	0.01321	0.01104
110	14	0	16.75	0	0.01250	0.01045
120	14	-0.01	16.75	0	0.01331	0.01104
130	13.9	-0.015	16.75	0	0.01382	0.01134
140	13.75	-0.025	16.75	0	0.01481	0.01194
150	13.5	0	16.75	0	0.01296	0.01045
160	13.5	-0.025	16.75	0	0.01509	0.01194
170	13.25	-0.025	16.75	0	0.01538	0.01194
180	13	-	16.75	-	-	-
Rata-rata					0.01323	0.01091

3.3 Hasil Pemodelan Sistem Persamaan Diferensial Linear dan Simulasi Numerik

Nilai-nilai yang telah diperoleh berdasarkan hasil perhitungan yaitu C_1 , C_2 dan C_3 kemudian dimasukkan ke dalam persamaan (2) dan (3) untuk membangun *initial* model persamaan diferensial dalam kasus aliran air bertingkat ini. Model persamaan diferensial dari sistem instalasi air ini dapat dilihat pada persamaan (11) dan (12).

Selanjutnya, model yang telah dibangun diuji secara numerik menggunakan metode *Euler*. Perhitungan numerik dilakukan untuk mengetahui profil perubahan volume air pada tangki A dan B menggunakan beberapa skenario nilai C_1 dan C_2 dengan tujuan untuk mendapatkan model yang paling mendekati kebenaran. Sementara itu, skenario simulasi numerik ditunjukkan pada Tabel 3. Nilai-nilai C_1 dan C_2 diambil dari nilai yang didapat pada hasil pengukuran (Tabel 2) dimana skenario 1 merupakan nilai rata-rata dan skenario 2-4 diambil secara random dari Tabel 2.

$$\frac{\partial VA}{\partial t} = 0.175 - C_1 VA \tag{11}$$

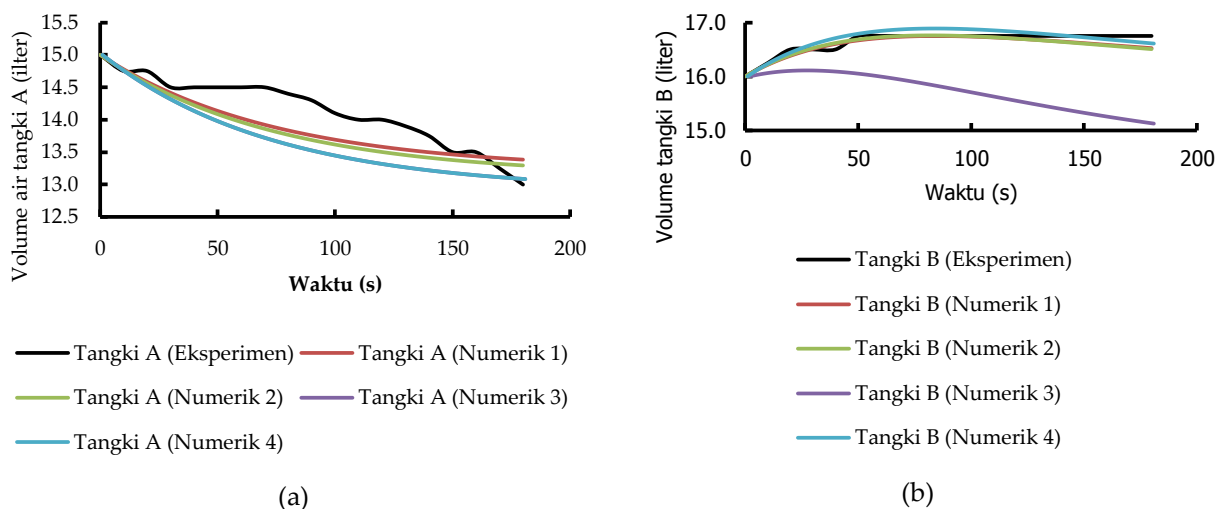
$$\frac{\partial VB}{\partial t} = C_1 VA - C_2 VB \tag{12}$$

Tabel 3 Skenario nilai konstanta pada simulasi numerik

Skenario	C_1	C_2
1	0.01323	0.01091
2	0.01333	0.01094
3	0.01356	0.01212
4	0.01356	0.01091

3.4 Perbandingan Metode Numerik dan Eksperimental

Hasil simulasi numerik dari keempat skenario yang telah dibangun beserta hasil eksperimen volume air pada tangki A dan B disajikan pada Gambar 3.



Gambar 3 Perubahan volume air dalam tangki hasil eksperimen dan numerik: (a) tangki A; (b) tangki B

Berdasarkan Gambar 3, terlihat bahwa skenario yang paling mendekati dengan kurva hasil eksperimen adalah skenario 1,2 dan 4. Namun, untuk menentukan skenario terbaik, diperlukan perhitungan *root mean square error* (RMSE) dimana semakin kecil nilainya maka semakin baik suatu model [10]. Hasil perhitungan RMSE setiap skenario disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4 Hasil perhitungan nilai RMSE setiap skenario

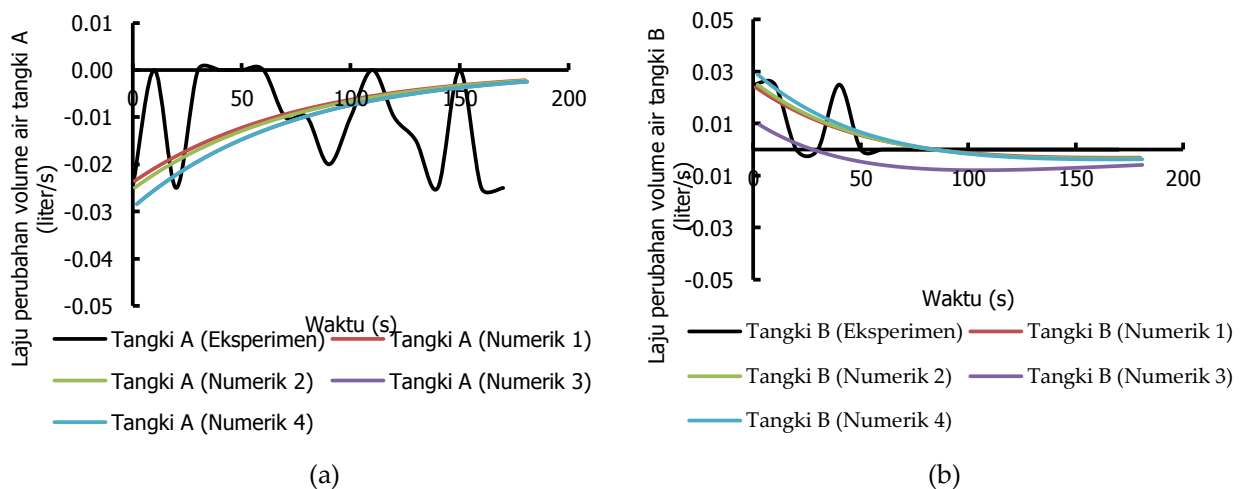
Skenario	RMSE
1	0.2599
2	0.2933
3	0.8509
4	0.3836

Berdasarkan Tabel 4, model yang menghasilkan nilai RMSE paling kecil adalah skenario 1 dengan nilai 0.2599 sehingga model skenario 1 merupakan model yang paling bagus. Hasil simulasi menggunakan metode Euler ini sudah bagus sebagaimana analisa numerik yang telah dilakukan oleh Fajar *et al.* [6] dimana menghasilkan error dibawah 2% saja. Dengan demikian, hasil simulasi numerik dalam kasus peneliterian ini merupakan gambaran ideal dari perubahan volume air pada tangki A dan B setiap satuan waktu. Namun pada kenyataannya, hasil eksperimen menunjukkan kurva yang tidak halus karena adanya faktor yang mempengaruhi keakuratan hasil pengukuran mulai dari skala terkecil alat ukur volume air, kurang presisi dalam pengukuran waktu dan pengamatan volume air khususnya yang dilakukan secara manual dengan mata. Namun demikian, hasil eksperimen dan simulasi terlihat memiliki pola yang hampir sama sehingga model SPDL telah mampu menggambarkan kondisi laju perubahan volume air tangki A dan B secara kontinyu. Dari hasil simulasi 4 skenario, model yang memang paling sesuai dalam menggambarkan kasus sistem aliran air pada tangki bertingkat ini adalah skenario 1 dengan nilai C_1 0.01323 dan C_2 0.01091. Persamaan dari model ini dapat dilihat pada persamaan (13) dan (14).

$$\frac{\partial VA}{\partial t} = 0.175 - 0.01323VA \quad (13)$$

$$\frac{\partial VB}{\partial t} = 0.01323VA - 0.01091VB \quad (14)$$

Grafik laju perubahan volume dari tangki A dan B disajikan pada Gambar 4. Terlihat bahwa hasil eksperimen menunjukkan ada hasil yang fluktuatif. Hal ini terjadi sebagaimana faktor yang telah dijelaskan sebelumnya yaitu faktor kepresisian alat ukur dan faktor pengamatan yang kurang akurat. Secara umu, hasil simulasi telah mampu menggambarkan laju perubahan volume pada tangki A dan B dan yang paling mendekati hasil eksperimen adalah skenario 1.



Gambar 4 Perbandingan laju perubahan volume tangki A dan B secara eksperimen dan numerik

4. Kesimpulan

4.1 Kesimpulan

Dari hasil perbandingan metode eksperimental dan metode numerik yang mengaplikasikan sistem persamaan diferensial linear, dapat disimpulkan bahwa kondisi volume air tangki A dan B serta laju perubahan volume airnya setiap satuan waktu menunjukkan tren yang hampir sama. Hasil terbaik diperoleh pada skenario 1 dengan nilai C_1 dan C_2 berturut turut adalah 0.01323 dan 0.01091 dimana nilai RMSE pada skenario ini merupakan yang paling kecil yaitu 0.2599. Adapun ketidakakuratan hasil eksperimen terjadi karena pengukuran dilakukan sesuai kondisi di lapangan yang mana alat ukur volume air memiliki tingkat ketelitian rendah dan pengamatan dilakukan secara manual menggunakan mata. Hasil simulasi numerik metode *Euler* dengan mengaplikasikan SPDL telah mampu menggambarkan kondisi ideal sistem aliran air bertingkat sehingga dapat kondisi volume air dan laju perubahan volumenya dapat diprediksi mendekati kondisi sebenarnya.

4.2 Saran

Pengukuran secara eksperimen perlu dilakukan menggunakan alat ukur yang lebih presisi dan menggunakan data logger yang mampu merekam data secara simuliteran dan menghindari kesalahan pengamatan.

REFERENCES

- [1] Kreyszig E. *Advanced Engineering Mathematics*. 10th ed. New York: John Wiley & Sons Inc; 2011.
- [2] Hadi AN, Djauhari E, Supriatna AK, Johansyah MD. Teknik Penentuan Solusi Sistem Persamaan Diferensial Linear Non-Homogen Orde Satu. *Jurnal Matematika*. 2019;18(1):29-40.
- [3] Sumithra B. Engineering Applications of Differential equations. *International Journal Application or Innovation in Engineering & Management*. 2017;6(7):110 -114.
- [4] Setiawan A. *Pengantar Metode Numerik*. Yogyakarta: Andi Yogyakarta; 2006.
- [5] Fajar DM, Wibowo HAC, Putri WA. Simulasi asas Torricelli menggunakan visual basic for application (VBA) pada microsoft excel. *Prosiding Simposium Nasional Inovasi Pembelajaran dan Sains*; 2014.
- [6] Wijaya JY, Liong TH, Wardani KRR. Perbandingan Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Metode Backpropagation , Euler, Heun, dan Runge-kutta Orde 4. *Jurnal Telematika*. 2015;11(1):1-6.
- [7] Munir R. *Metode Numerik*. 3rd ed: Informatika; 2010.
- [8] Ng KC, Ng YL, Lam WH. Particle simulation and flow sequence on drainage of liquid particles. *Computers & Mathematics with Applications*. 2013;66(8):1437-51.
- [9] Chapra SC. *Numerical Methods for Engineers With Personal Computer Application*. 2nd ed. New York: McGraw Hill College; 1988.
- [10] Saputra TW, Waluyo S, Septiawan A, Ristiyana S. Pengembangan model prediksi laju pengeringan pada irisan wortel (*Daucus carota*) berbasis regresi linier berganda (RLB) dan jaringan syaraf tiruan (JST). *Jurnal Ilmu Rekayasa Pertanian dan Biosistem*. 2020;8(2):209–218.