

Penyusunan Model Elemen Hingga Interaksi Persamaan Aliran dengan Persamaan Sebaran Udara

(Model Arrangement using Finite Element for Interaction Between Flow Equation and Air Spreading Equation)

JAZAUL IKHSAN, ADAM PAMUDJI RAHARDJO

ABSTRACT

Aeration process is one of water treatment processes. The process consists of two physical phenomena, flow, and spreading of air bubble. This research has developed a finite element model for three-dimensional flow and spreading of air bubble. The flow equation employs Navier-Stokes equation. The spreading of air bubble is modeled as convection-diffusion equation. The Navier-Stokes and the spreading of air bubble equation are combined by Navier-Stokes equation with additional new term, which shows the accelerated flow caused by the air bubble moves. The Navier-Stokes equation was solved in four stages, i.e., Taylor Galerkin convection approximation, viscous prediction, pressure correction and velocity correction stages. Galerkin Standard method was used to solve the spreading of air bubble equation. Quadratic brick finite elements with 20 nodes were used on the geometry. To show performance model, comparison to the result of air bubble investigation was carried out. The numerical model that has been obtained is capable of simulating the phenomena of air bubble spreading and flow. The numerical stability analyses showed that the numerical scheme of convection and diffusion equation based on Galerkin is stable for Courant Number ≤ 0.01 and Peclet Number < 125 .

Keywords: Finite Element, Navier-Stokes, Convection-Diffusion

PENDAHULUAN

Salah satu dampak samping dari aktifitas manusia adalah terjadi pencemaran air. Untuk itu dalam perencanaan lingkungan yang modern disyaratkan adanya pengolahan air limbah sebelum dibuang/dialirkan (Marsolek dkk, 2012). Proses aerasi merupakan salah satu proses dalam pengolahan limbah cair. Fenomena fisik yang ada dalam proses ini adalah sebaran udara dan aliran air. Kedua fenomena fisik ini saling mempengaruhi, sebaran udara mengakibatkan aliran dan aliran air mempengaruhi sebaran udara. Dalam persamaan sebaran udara digunakan persamaan difusi-konveksi :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \nabla^2 C + f \quad (1)$$

dengan C adalah konsentrasi udara, k adalah koefisien difusi dan u adalah kecepatan air. Persamaan aliran air yang digunakan adalah persamaan Navier-Stokes / persamaan momentum (2) dan persamaan kontinuitas (4).

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (2)$$

dengan f adalah *body force*, ν adalah koefisien kinematik, ρ adalah berat jenis, p adalah tekanan, s adalah *term* pengaruh gerakan udara dan u adalah kecepatan.

Term/suku baru yang menggambarkan pengaruh gerakan udara digunakan Persamaan (3) dari Sumiadi (2001).

$$s = 9.8 C \quad (3)$$

dengan s adalah percepatan dan C adalah konsentrasi. Persamaan kontinuitas ditunjukkan dalam Persamaan (4).

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{4}$$

METODE PENELITIAN

Elemen yang digunakan adalah elemen prisma segi empat kuadrat dengan jumlah titik nodal 20 buah tiap elemen. Pada penelitian ini untuk membuat geometri digunakan program *mesh generator* yang sudah ada, yaitu dengan program *3D Air Bubble Model* yang dikembangkan oleh Jurusan Teknik Sipil FT UGM. Bahasa pemrograman yang dipakai adalah Watcom Fortran.

Diskretisasi numeris elemen hingga persamaan Navier-Stokes dan persamaan difusi-konveksi disusun berdasarkan metode sisa berbobot (*weighted residual method*). Metode ini mengintegrasikan perkalian antara selisih *R* (sisa, *residual*) antara solusi persamaan menerus (*continuous*) yang didekati dan solusi persamaan pendekat diskret dengan suatu fungsi pembobot *W* pada seluruh hitungan (domain). Hasil dari integrasi tersebut harus seminimal mungkin, yaitu sama dengan nol.

$$\int_{\Omega} W R d\Omega = 0 \tag{5}$$

Penyelesaian persamaan Navier-Stokes menggunakan cara yang dikenalkan oleh Akin (1994). Metode penyelesaian yang digunakan adalah penyelesaian secara bertahap dengan menggunakan 4 langkah. Keempat langkah tersebut adalah perkiraan kecepatan dengan mempertimbangkan suku konvektif saja, perkiraan kecepatan karena kekentalan dan gaya medan (*body force*) termasuk *term* tambahan, perhitungan tekanan dan terakhir perhitungan kecepatan dengan memasukkan pengaruh tekanan. Pada langkah pertama yaitu penyelesaian suku konvektifnya digunakan skema Taylor-Galerkin. Langkah-langkah diskretisasi dari persamaan Navier-Stokes sebagai berikut :

a. Langkah ke-1: perkiraan penyelesaian suku konvektif dengan skema Taylor-Galerkin.

Persamaan untuk suku konvektif adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} \tag{6}$$

Dengan aplikasi teorema Green diperoleh persamaan diskret sebagai berikut :

$$\int_{\Omega} w_i u_i^n d\Omega = \int_{\Omega} w_i u_i^0 d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} w_i u_i^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} d\Omega + \frac{2}{2} \Delta t^2 \int_{\Omega} w_i u_k^0 \frac{\partial u_j^0}{\partial x_k} \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} d\Omega + \frac{1}{2} \Delta t^2 \int_{\Omega} w_i u_j^0 u_k^0 \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial x_j \partial x_k} d\Omega \tag{7}$$

b. Langkah ke-2 : prediksi pengaruh kekentalan (viskositas)

Dengan pengaruh gaya medan (*body force*) *f_i* dan *term* baru maka persamaan suku difusi adalah sebagai berikut ini :

$$\int_{\Omega} w_i \left[\alpha \left(g_i + a_i \right) + (1-\alpha) \left(g_i^0 + a_i^0 \right) \right] d\Omega + \alpha \nu \Delta t \int_{\Gamma} w_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) n_j d\Gamma - \alpha \nu \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega + (1-\alpha) \nu \Delta t \int_{\Gamma} w_i \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} \right) n_j d\Gamma - (1-\alpha) \nu \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} \right) d\Omega \tag{8}$$

Selanjutnya dengan penerapan teorema Green diperoleh persamaan diskret sebagai berikut :

$$\int_{\Omega} w_i u_i^n d\Omega = \int_{\Omega} w_i \left[\alpha \left(g_i + a_i \right) + (1-\alpha) \left(g_i^0 + a_i^0 \right) \right] d\Omega + \alpha \nu \Delta t \int_{\Gamma} w_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) n_j d\Gamma - \alpha \nu \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega + (1-\alpha) \nu \Delta t \int_{\Gamma} w_i \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} \right) n_j d\Gamma - (1-\alpha) \nu \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} \right) d\Omega \tag{9}$$

c. Langkah ke-3 : koreksi tekanan

Persamaan gerak oleh gradien tekanan adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla^2 p \tag{10}$$

Dengan penerapan teorema Green, Persamaan (10) menjadi :

$$\int_{\Omega} w_i \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla^2 p \right] d\Omega = 0 \tag{11}$$

d. Langkah ke-4 : koreksi vektor kecepatan

Tekanan *p_n* diketahui dari langkah ke-3. Akibat pengaruh tekanan, vektor kecepatan dicari lagi. Persamaan yang digunakan adalah sama dengan Persamaan (10) pada langkah ke-3, yaitu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla^2 p \tag{12}$$

namun demikian, persamaan ini langsung didiskretkan. Penerapan skema Galerkin memberikan hasil sebagai berikut :

$$\int_{\Omega} w_i u_i^n d\Omega = \int_{\Omega} w_i u_i^0 d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} w_i \frac{\partial p^n}{\partial x_i} d\Omega \tag{13}$$

Diskretisasi persamaan difusi-konveksi menggunakan skema Galerkin. Skema Galerkin mengambil fungsi pembobot sama dengan fungsi bentuk. Persamaan (1) dapat diubah ke bentuk persamaan diskret:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (u \phi) \psi \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla \phi) \psi \, d\Omega = \int_{\Omega} S \psi \, d\Omega \quad (14)$$

KONDISI BATAS

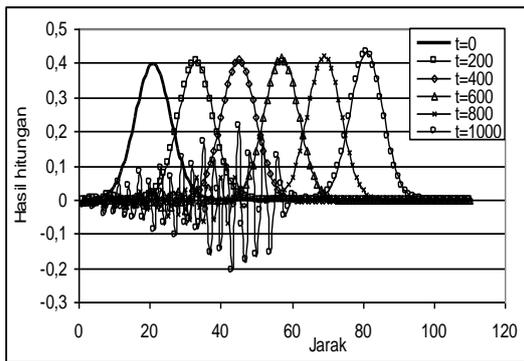
Penanganan kondisi batas dilakukan dengan tipe *Diriclet* pada bagian bawah kolom aerator untuk variabel konsentrasi udara dan kecepatan air. Batas kolom aerator yang lain digunakan tipe *Diriclet* untuk variabel kecepatan air dan tipe *Neumann* untuk perhitungan konsentrasi udara.

HASIL DAN PEMBAHASAN

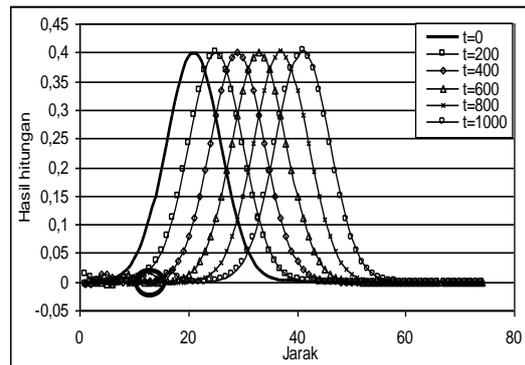
Analisis stabilitas

Batasan-batasan yang diambil adalah angka Courant ($Cr = \frac{u \Delta t}{\Delta x}$) pada konveksi murni, angka Peclet ($Pe = \frac{u \Delta x}{2k}$) untuk kasus konveksi-difusi, dengan u adalah kecepatan, Δt adalah interval waktu, Δx adalah panjang elemen, dan k adalah koefisien difusi. Analisa stabilitas dilakukan pada problem 1 dimensi pada persamaan transport dengan kondisi awal distribusi Gauss. Hasil hitungan untuk skema Standar Galerkin selalu terjadi osilasi pada angka Courant yang sangat kecil sekalipun. Hasil hitungan disajikan pada Gambar 1.

Analisis stabilitas yang melibatkan suku difusi dengan skema Standar Galerkin disajikan dengan Gambar 2. Kemudian batas-batas analisis stabilitas dibuat grafik seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.

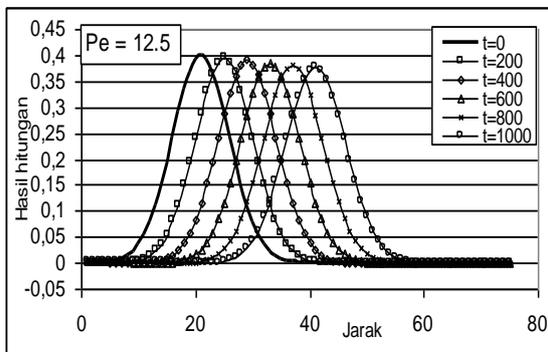


Cr = 0,03

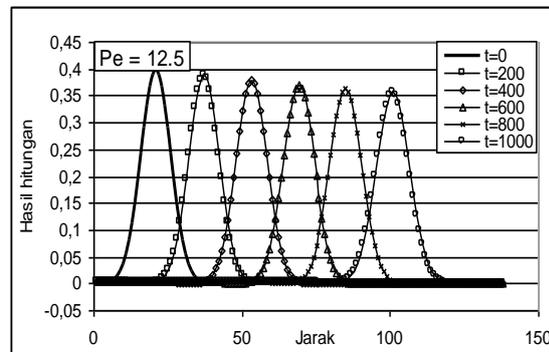


Cr = 0,01

GAMBAR 1. Hasil hitungan program 1D pada kasus konveksi skema Standar Galerkin

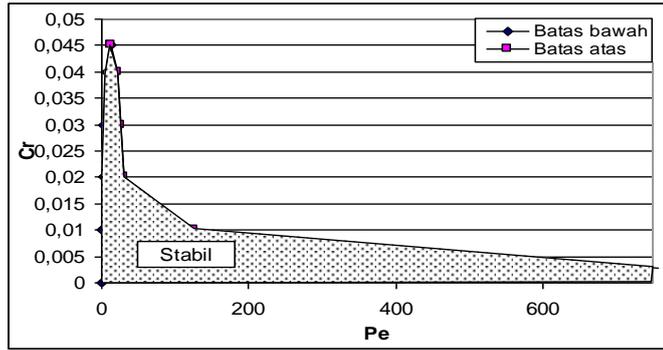


Cr = 0,01



Cr = 0,04

GAMBAR 2. Hasil hitungan dengan skema Standar Galerkin



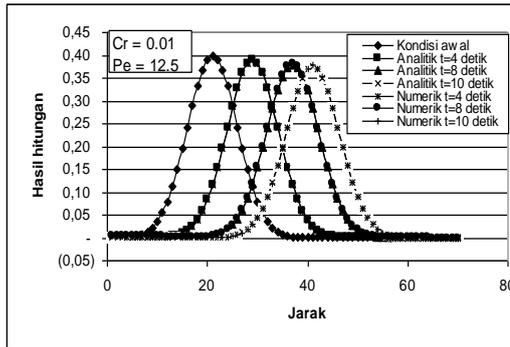
GAMBAR 3. Batas kestabilan angka Cr dan Pe skema Standar Galerkin

Verifikasi

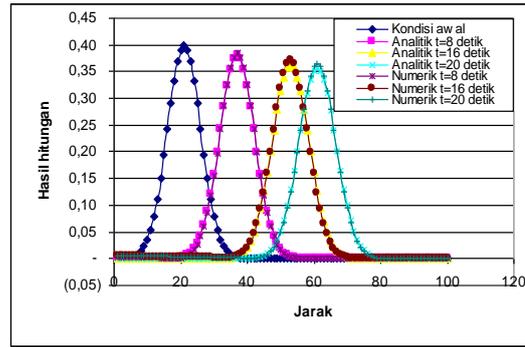
Perbandingan hasil analitik dan hasil model numerik disajikan pada Gambar 4. Dari Gambar 4 ditunjukkan bahwa model numerik sudah mempunyai pola yang sama dengan hasil analitik.

Untuk lebih mengetahui unjuk kerja dari model numerik, maka dilakukan perbandingan hasil model numerik dengan hasil pengukuran

laboratorium dari Himawan dan Fahmi (Hartana, 2001) seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5 dan 6. Parameter yang ditinjau adalah kecepatan air dan konsentrasi udara. Mesh yang digunakan untuk mensimulasi dipakai mesh yang dibuat dari mesh generator “3D Air Bubble Flow Model” seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5 dengan ukuran $l = 0,15$ m dan $h = 0,80$ m.

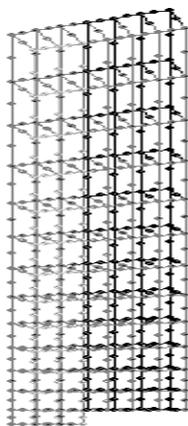


$Cr = 0,01$

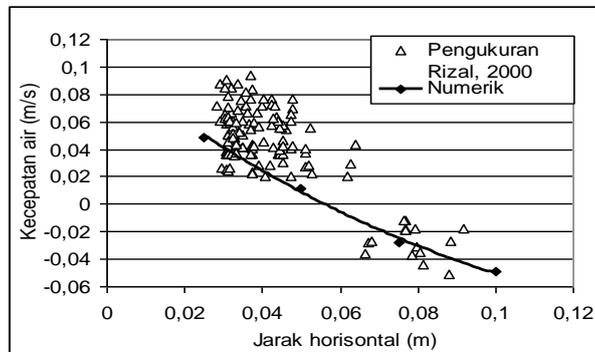


$Cr = 0,02$

GAMBAR 4. Perbandingan hasil analitik dan hasil model numerik pada kasus 1 dimensi

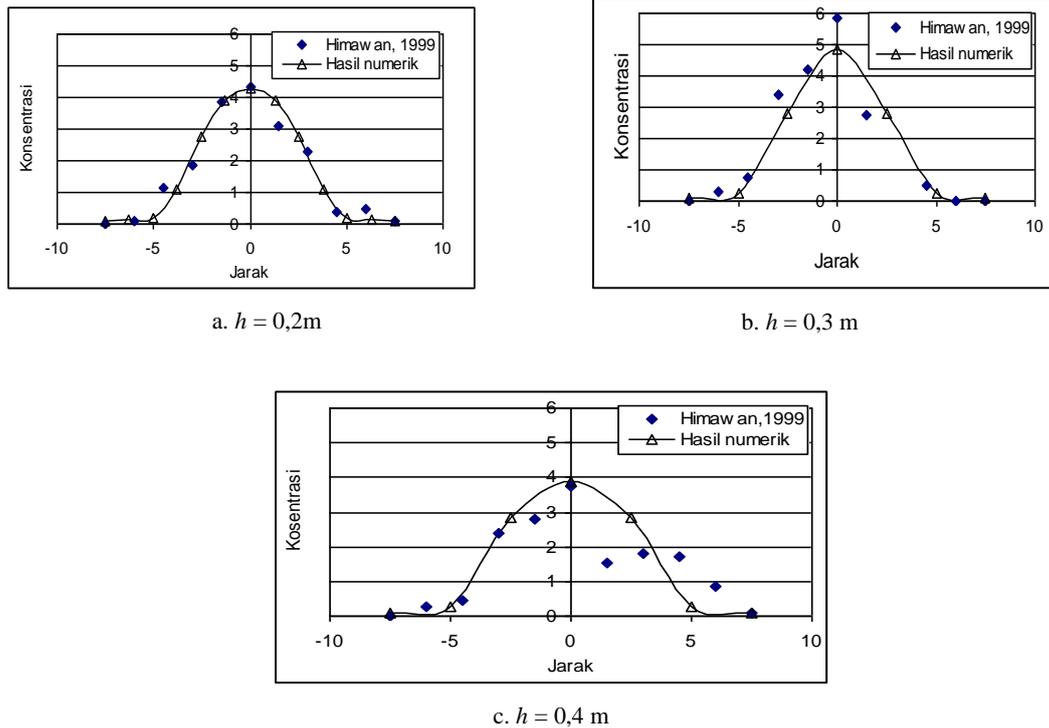


(a)



(b)

GAMBAR 5. a. Mesh untuk hitungan verifikasi, b. Kecepatan air hasil pengukuran dan hasil model numerik pada $h = 0,2$ m

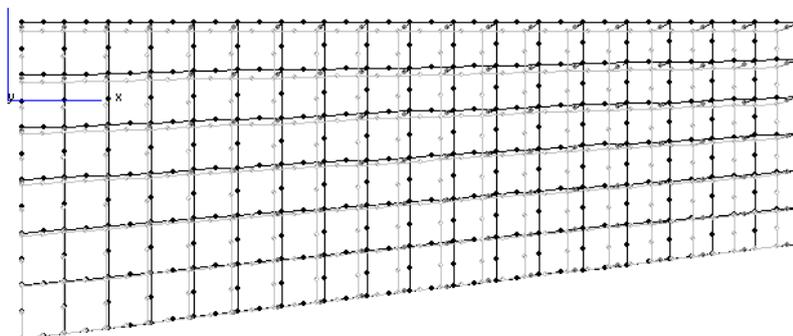


GAMBAR 6. Perbandingan hasil hitungan numerik dan pengukuran konsentrasi

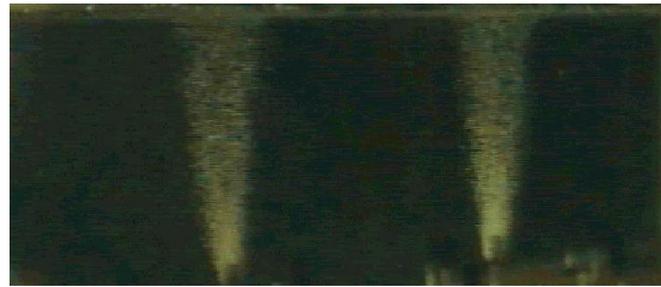
Gambar 5 dan Gambar 6 menunjukkan bahwa model numerik yang telah dibuat sudah mendekati hasil pengukuran meskipun ada perbedaan nilai. Perbedaan nilai, baik kecepatan ataupun konsentrasi udara dapat disebabkan oleh pengambilan nilai kondisi batas yang tidak tepat, pemakaian *terminal velocity* gelembung yang seragam atau pengambilan koefisien difusi yang tidak tepat.

Untuk melihat unjuk kerja model numerik pada kasus lain dilakukan simulasi pada kolam aerasi yang mempunyai 2 *sparger* dengan tinjauan 2 dimensi. Letak *sparger* pada $x =$

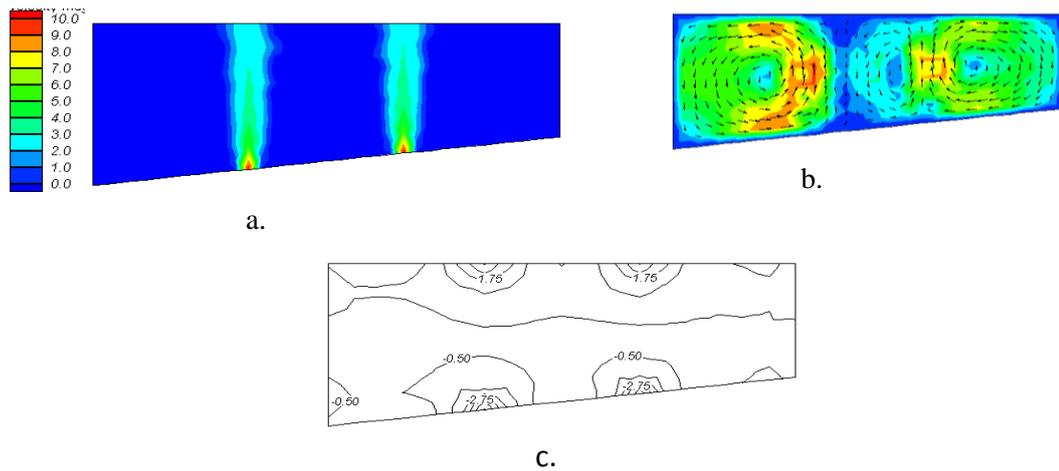
0,23 m dan $x = 0,46\text{ m}$. Debit gelembung udara 2 liter/menit. Ukuran kolam panjang 0,695 m dan tinggi 0,285 m, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 7. Hasil simulasi numerik dari kolam aerasi di atas kemudian diverifikasi secara kualitatif dengan gambar/foto dari laboratorium. Hal ini dilakukan karena tidak adanya data pengukuran yang dapat digunakan untuk verifikasi. Hasil dari foto laboratorium ditunjukkan pada Gambar 8 dan hasil simulasi numerik (dikalikan 10^3) ditunjukkan pada Gambar 9.



GAMBAR 7. Geometri kolam aerasi dengan dua *sparger*



GAMBAR 8. Foto distribusi gelembung udara pada kolam aerasi dengan dua *sparger*



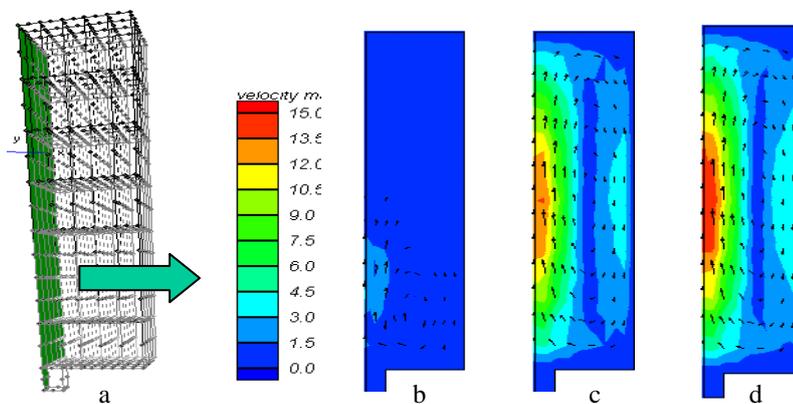
GAMBAR 9. a. Distribusi konsentrasi gelembung udara, b. Kontur dan vektor kecepatan air, c. Kontur tekanan dinamik

Dari Gambar 8 dan Gambar 9 dapat diperoleh kesimpulan bahwa hasil simulasi numerik mempunyai kecenderungan yang sama dengan perilaku di laboratorium. Kecepatan aliran air di dalam daerah yang dilalui gelembung udara dalam kolom aerasi cenderung bergerak dari bawah ke atas, sedangkan di luar daerah tersebut cenderung akan bergerak dari atas ke bawah. Distribusi gelembung udara yang terjadi akan mengikuti pola distribusi normal (Himawan, 1999).

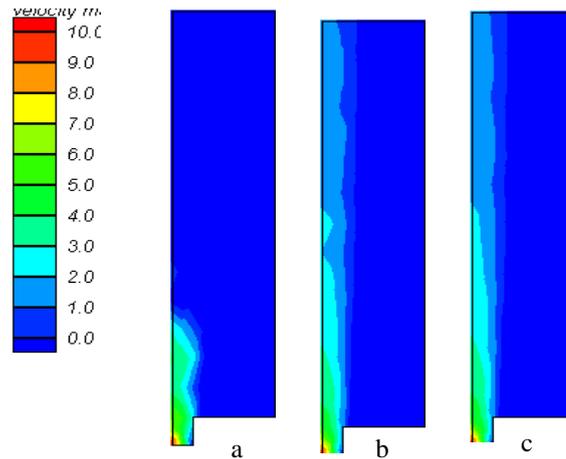
Aplikasi model untuk kasus 3D

Aplikasi model numerik untuk kasus dilakukan dengan mengambil geometri seperti Gambar 10.a. dan Gambar 12.a. Geometri ini menggambarkan kolom aerasi yang hanya ditinjau seperempat bagian saja. Tinggi kolom 0,70 m dan lebar 0,15 m. Hasil dari simulasi dapat dilihat pada gambar di bawah ini (dikalikan 10^3).

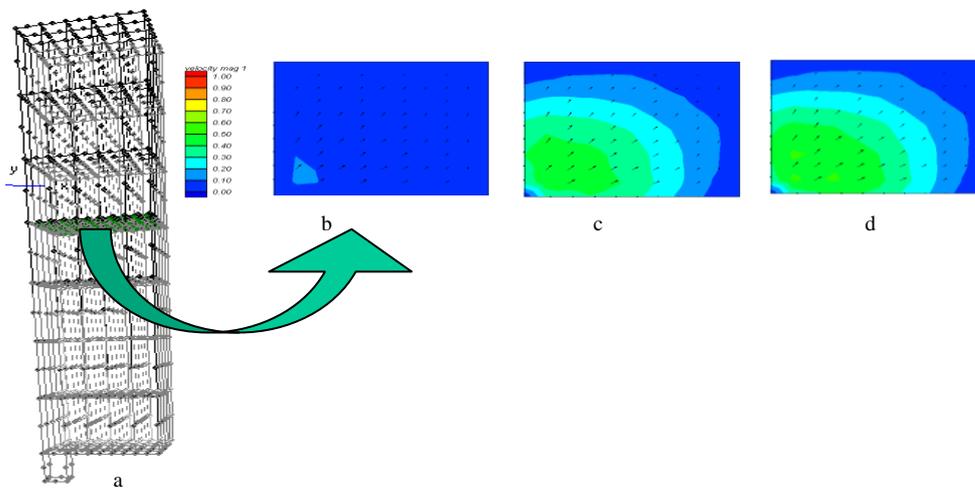
Untuk sebaran gelembung udara, hasil simulasi ditunjukkan dengan Gambar 11 dan 13.



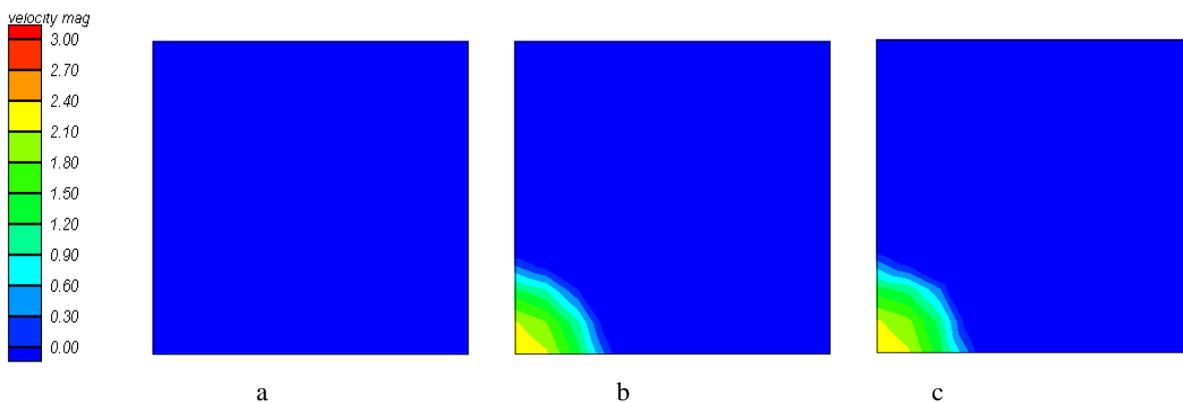
GAMBAR 10. a. Geometri kolom aerasi, b. Profil kecepatan air pada $t = 100$, c. Profil kecepatan pada $t = 400$, d. Profil kecepatan pada $t = 800$



GAMBAR 11. Sebaran gelembung udara dalam kolom aerasi pada a. $t = 100$, b. $t = 400$, c. $t = 800$



GAMBAR 12. a. Geometri kolom aerasi, b. Profil kecepatan air pada $t = 100$, c. Profil kecepatan pada $t = 400$, d. Profil kecepatan pada $t = 800$



GAMBAR 13. Sebaran gelembung udara dalam kolom aerasi pada $h = 0.4$ m untuk a. $t = 100$, b. $t = 400$, c. $t = 800$.

KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diperoleh dari penelitian yang telah dilakukan adalah :

1. Model numerik stabil untuk $C_r \leq 0.01$ dan $P_e < 125$.
2. Model numerik telah dapat menggambarkan interaksi persamaan Navier-Stokes dan sebaran gelembung udara (difusi-konveksi).

DAFTAR PUSTAKA

- Akin, J.E. (1994). *Finite Element for Analysis and Design*, Academic Press.
- Hartana. (2001). *Model Numerik Elemen Hingga 3D untuk Sebaran Gelembung Udara Dalam Air*, PPs UGM, Yogyakarta.
- Himawan, A.N. (1999). *Studi Gerak Spiral Gelembung Udara Individual dan Sebaran Kelompok Gelembung Udara Dalam Kolam Aerator*, Fakultas Teknik, UGM, Yogyakarta.
- Marsolek, M.D., Alcantara, J.T., Quintiro, L.F., Jackles, L.F., Cummings, P.K., Wayne, M., Vallejos, C., dan Jackels, S.C. (2012). *Wastewater Treatment for a Coffee Processing Mill in Nicaragua: A Service-Learning Design Project*, *International Journal for Service Learning in Engineering* Vol. 7, No. 1, pp. 69-92, 2012, ISSN 1555-9033
- Sumiadi (2001). *Interaksi Gerak Gelembung Udara dan Air pada Kolom Aerator*, PPs UGM, Yogyakarta.
-
- PENULIS:
- Jazaul Ikhsan✉
Program Studi Teknik Sipil, Fakultas Teknik,
Universitas Muhammadiyah Yogyakarta, Jalan
Lingkar Selatan, Tamantirto, Kasihan, Bantul
55183.
✉Email: jzl_ikhsan@yahoo.co.id
- Adam Pamudji Rahardjo
Program Studi Teknik Sipil dan Lingkungan,
Fakultas Teknik, Universitas Gadjah Mada, Jl.
Grafika no. 2, Yogyakarta.